جلسه اول

مطالب تحلیلی فائولز
سایمون
دینامیک ذرات ماریون

$$A\times B\times C = B(A\cdot C) - C(A\cdot B)$$

مشتق بردارها:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{du}\vec{A}(u) = \frac{d}{du}A_x\hat{i} + \frac{dA_y}{du}\hat{j} + \frac{dA_z}{du}\hat{k}$$

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{du} = \frac{dA}{du} + \frac{dB}{du}$$

$$\frac{d(A\cdot B)}{du} = \frac{dA}{du}\cdot B + A\cdot\frac{dB}{du}$$

$$\frac{d(A\times B)}{du} = \frac{dA}{du}\times B + A\times\frac{dB}{du}$$

جابجایی و جرم و زمان سه کمیت های اصلی اند.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

بردار جابجایی: برداری که محل یک نقطه خاص را نسبت به یک مبدأ مشخص می کند.

سرعت: آهنگ تغییرات جابجایی یک جسم (مشتق جابجایی نسبت به زمان)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \qquad |\vec{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

مشتق جابجایی نسبت به زمان

/ /

شتاب: مشتق جابجایی نسبت به زمان. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

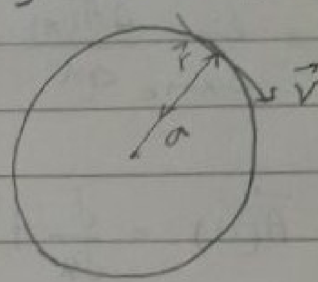
$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$

Ex: سرعت و شتاب برای شی حرکت دایره‌ای که بردار جابجایی آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید را به دست آورید.

$\vec{r} = b\sin\omega t\,\hat{i} + b\cos\omega t\,\hat{j}$

$v = b\omega\cos\omega t\,\hat{i} - b\omega\sin\omega t\,\hat{j}$

$\boxed{|v| = b\omega}$ → $r\omega$ رابطه آشنا



$a = -b\omega^2\sin\omega t\,\hat{i} - b\omega^2\cos\omega t\,\hat{j}$

$|a| = +b\omega^2 \rightarrow \vec{r}\omega^2$ جهت جابجایی خلاف جهت شتاب

$v\cdot a = -b^2\omega^3\sin\omega t\cdot\cos\omega t\,\hat{i} + b^2\omega^3\sin\omega t\cdot\cos\omega t\,\hat{j} = 0$

پس زاویه بین v, a ← ۹۰ می‌باشد.

جلسه (2)

/ /

قوانین نیوتن:

قوانین نیوتن: ۱) اینرسی: هر جسم به حرکت خودش ادامه می‌دهد مگر این که به واسطه نیرویی مجبور به تغییر آن شود. به بیان دیگر اگر جسمی ساکن است ساکن می‌ماند اگر حرکت می‌کند با همان سرعت به حرکتش خود ادامه می‌دهد.

2) $F = ma$: جسم به واسطه‌ی نیرویش در جهتی حرکت می‌کند که جهت آن همان جهت نیرو است. (محرک = نیرو)

3) هر عملی را عکس العملی مساوی و مخالف است.

مرجع: ۱) مرجع لخت ← مرجعی که در آن دستگاه قانون اول نیوتن برقرار باشد (بدون شتاب)

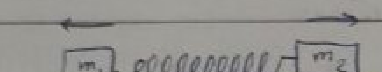
۲) مرجع نالخت ← مرجع شتابدار

Point: مرجع لخت صد در صد وجود ندارد

* به گفته‌ی اینشتین ما مرجع های لخت را داریم که باید در آن ها قوانین فیزیک شکل ریاضی شان حفظ شود.

جرم: معیاری لختی (بزرگی لختی)

لختی: مقاومت جسم در مقابل شتاب (حرکت)



دو جرم را فشرده سپس رها می‌کنیم. (سطح بدون اصطکاک)

$$\frac{m_1}{m_2} = \left|\frac{V_2}{V_1}\right|$$

هر چه جسم سنگین‌تر ← سرعت کمتر

$$m_1|V_1| = m_2|V_2| \Rightarrow m_1V_1 \overset{\text{جهت}}{=} -m_2V_2 \Rightarrow P_1 = -P_2$$

تکانه $P = mV$

شکل صحیح تر و کامل تر

$$* \; F = ma \Longrightarrow F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = m\frac{dV}{dt} + V\frac{dm}{dt}$$

← اگر جرم ثابت باشد

اگر ثابت بود

$$\Rightarrow \cancel{\frac{dm}{dt}} \Rightarrow F = ma$$

(از مثال قبل)

$$P_1 = -P_2 \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{dP_1}{dt} = -\frac{dP_2}{dt} \; ② \Rightarrow F_1 = -F_2 \quad \text{قانون } ③$$

$$P_1 = -P_2 \Rightarrow \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2 \; ① \Rightarrow P_1 + P_2 = \text{ثابت}$$

قانون سوم نیوتن نشان می‌دهد مجموع تکانه های متقابل بین دو جسم ثابت است.

حرکت مستقیم الخط (راست الخط)

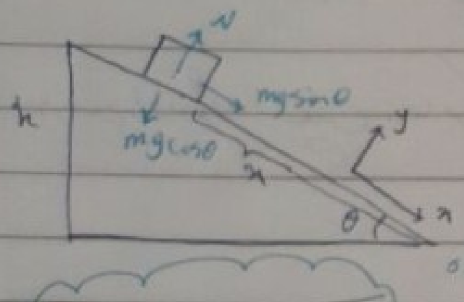
$F = m\ddot{x}$ (a) $\qquad \ddot{x} = \frac{F}{m}$ $\frac{\text{ثابت}}{\text{ثابت}}$ $\Rightarrow \ddot{x} = a$ ثابت

$\frac{d\dot{x}}{dt} = a \xrightarrow{\int} \int d\dot{x} = \int a\,dt \xrightarrow{v_0 = 0} \dot{x} = at + v_0 \;{}^{*} \longrightarrow v = at + v_0$

$\xrightarrow{*\int} \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} (at + v_0)\,dt \Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

از حذف t به دست می‌آید $\longrightarrow$ $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

مثال: جسمی از ارتفاع h بر روی سطح شیبدار رها می‌شود. سرعت جسم در پایین سطح شیبدار چقدر است؟



$\sum f_x = ma$ تعادل

$mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin\theta} \Rightarrow v^2 - \cancel{v_0^2} = 2\underbrace{a}_{g\sin\theta}\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)$

x: فاصله طی شده

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

صورت اصطکاک:

$f_k = \mu_k N \Rightarrow \sum f_y = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

$\sum f_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$

نیروهای وابسته به مکان:

مقدار نیرویی که وارد می‌شود به موقعیت این جسم نسبت به بقیه اجسامی که در آن مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرند تاثیر دارد. (نیروها تابعیت مکان دارند) مکان جسم در مقدار نیرو تاثیر می‌گذارد: مثل نیروی کشش

$F \to F(x) \qquad F(x) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} - F(x) = 0 \rightarrow$ معادله دیفرانسیل

/ /

Ex) $F(x) = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x = A\cos(\underset{\sqrt{k/m}}{\omega} x + \varphi)$ سرعت زاویه

$F(x) = m\ddot{x} \Rightarrow F(x) = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow F(x) = m\dfrac{dv}{dx}\underbrace{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}_{v}$

$F(x) = mv\dfrac{dv}{dx} \Rightarrow F(x)\,dx = mv\,dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} \underbrace{\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx}_{\text{کار}} = \int_{v_0}^{v} mv\,dv$

$* \; W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = T - T_0$ تغییرات انرژی

$** \; W = -\Delta V(x)$ تغییرات پتانسیل

$*, ** \Rightarrow \Delta T = -\Delta V(x)$

$$\boxed{T - T_0 = -(V(x) - V_0(x_0))}$$

$T + V(x) = T_0 + V(x_0) = E$ (معادله انرژی) انرژی مکانیکی کل

(قانون پایستگی انرژی مکانیکی)

* نیروهایی که پایستار باشند انرژی پتانسیل برای آنها قابل تعریف است.

نیروی پایستار: به مسیر حرکت بستگی ندارد (به نقاط ابتدا و انتهایی وابسته اند) - کار نیروهای پایستار در یک مسیر رفت و برگشت صفر است.

Point: نیروهایی که فقط وابستگی مکانی دارند نیروهای پایستارند. نیروی پایستار = نیروی وابسته مکانی

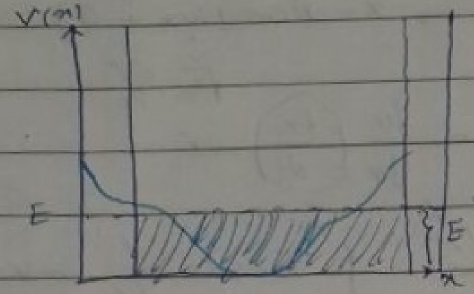
$T + V(x) = E$

$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)]$

(1) $v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$ پتانسیل v به صورت تابعی از x

$\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$

تابعی از زمان نسبت به x



متحرک است $\Leftrightarrow V(x) < E$

$V(x) = E$ → نقطه برگشت

Ex: جسمی با سرعت v_0 به صورت عمودی از زمین به بالا پرتاب می‌شود معادله انرژی و نقطه برگشت آن را به دست آورید.

نقطه برگشت x

$\uparrow y^+$
$\downarrow -y$

$x=0 \uparrow \quad \downarrow$

$E_1 \quad E_2$

$$F = -mg$$

$$W = -\Delta V(x) \Rightarrow F = \frac{-V(x)}{dx}$$

$$+mg = +\frac{dV(x)}{dx} \xrightarrow{\int} \int mg\, dx = \int dV(x)$$

$\begin{cases} x=0 \\ V=0 \end{cases}$

$$V(x) = mgx + \cancel{C}$$

$$E = T + V(x) \Rightarrow E = mgx + \frac{1}{2}mV^2$$

بنابراین $x=0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_0^2$

نقطه برگشت $\frac{1}{2}\overset{E_1}{\cancel{m}v_0^2} = \cancel{m}gx + \overset{E_2}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow V_0^2 = 2gx + v^2$

نقطه برگشت $v=0 \Rightarrow v_0^2 = 2gx \Rightarrow x_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \Big/ \cancel{1 - \frac{v_0^2}{2gr_e}}$

Ex: تابع پتانسیل را با در نظر گرفتن تغییر نیروی گرانش با ارتفاع به دست آورید.

$$F = \frac{-Gm M}{r_e^2} = -\cancel{m}g \Rightarrow G = \frac{gr_e^2}{M}.$$

جرم زمین

$m\ddot{x} = mv\frac{dv}{dx}$

$$F_{(x)} = \frac{-GmM}{(r_e+x)^2} = \frac{gr_e^2}{M}\frac{mM}{(r_e+x)^2} \Rightarrow F_{(x)} = mg\left(\frac{r_e^2}{(r_e+x)^2}\right)$$

جسمی که در فاصله x از زمین قرار دارد

$$\Rightarrow mg\left(\frac{r_e^2}{(r_e+x)^2}\right) = mv\frac{dv}{dx}$$

$$\Longrightarrow mg\left(\frac{r_e^2}{(r_e+x)^2}\right) = mv\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow -\int_{x_0}^{x}\frac{mgr_e^2\,dx}{(r_e+x)^2} = \int_{v_0}^{v} mv\,dv$$

$$mgr_e^2\left(\frac{1}{r_e+x} - \frac{1}{r_e+x_0}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

ازطرفی $-(V(x)-V(x_0)) = \Delta T \Rightarrow \boxed{V(x) = -mg\frac{r_e^2}{r_e+x}}$

داریم $\Delta T = -\Delta V$

تمرین: اثبات کنید $V_e = 11\ \frac{km}{s}$ سرعت فرار زمین

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \Big/ \left(1 - \frac{v_0^2}{2gr_e}\right)$$

فرض می‌کنیم جسمی با سرعت اولیه v_0 در سطح زمین ($x_0 = 0$) به بالا پرتاب می‌شود. در این صورت بعد از حل معادله انرژی برحسب v^2 خواهیم داشت:

$$v^2 - v_0^2 = 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1}$$

اگر x در مقایسه با r_e ناچیز باشد به طوری که بتوان از $\frac{x}{r_e}$ صرف نظر کرد، رابطه بالا به مثال قبلی در مورد میدان گرانشی یکنواخت تبدیل می‌شود. نقطه برگشت با قرار دادن $v = 0$ در معادله بالا برحسب x به دست می‌آید.

$$x_{max} = h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr_e}\right)^{-1}$$

صفر $\Rightarrow x_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$

Ex) یک مولکول دواتمی مدلی به صورت زیر است که در آن x فاصله بین دو اتم است. نشان دهید که x_0 فاصله بین دو اتم است هنگامی که تابع انرژی پتانسیل کمینه مقدار باشد و مقدار آن $V_{x} = -V_0$ است.

$$V(x) = V_0\left(1 - e^{-\frac{x-x_0}{\delta}}\right)^2 - V_0$$

$$V'(x) = \frac{2V_0}{\delta}\left(\frac{x-x_0}{\delta}\, e^{-\frac{x-x_0}{\delta}}\right) e^{\frac{x-x_0}{\delta}} = 0 \Longrightarrow \frac{x-x_0}{\delta} = 0$$

$\boxed{x = x_0}$

/ /

Ex: ذره‌ای در پتانسیل $\frac{1}{2}kx^2$ در حالت توقف از نقطه‌ی $x=R$ حرکت می‌کند را در نظر بگیرید، نشان دهید که وضعیت ذره را تصویر کنید.

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad E = T + V$$

$$V(x) = U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$v = \sqrt{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}\,\Bigg|_{x=a} \xrightarrow[E=\frac{1}{2}ka^2]{\text{انتگرال}} t = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\sin^{-1} + C$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C$$

$$\begin{cases} x = a \\ t = 0 \end{cases} \quad \sin^{-1}\frac{a}{a} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}, \quad \sin^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}$$

حرکت هماهنگ میرا:

نیروی وابسته به سرعت (اغلب نیروهای اصطکاکی)
(چرخش، غلتش وابستگی به سرعت ندارند.

وابسته به سرعت

$$\underbrace{f_0}_{\text{مستقل از سرعت}} + f(v) = m\frac{dv}{dt}$$

c_1، c_2 به شکل و اندازه جسم بستگی دارد

جهت حرکت خلاف

$$f(v) = -c_1 v - c_2 v|v|$$

$$f(v) = \sum \pm b v^n$$

به صورت فوق

اگر نیرو به سرعت بستگی داشته باشد می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتون چگونگی تغییرات سرعت نسبت به زمان (جابجایی نسبت به زمان) که به واسطه آن نیرو رخ داده است را محاسبه کرد. معمولاً نیروهای مقاومتی (هوا یا آب) چنین وابستگی دارند.

$c_1 = 1.5\times10^{-4} D \rightarrow$ 1- قطر جسم کروی

$c_2 = 0.22 D \rightarrow$? D^2

یادآوری:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\times3} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \dots$$

حرکت افقی با مقاومت خطی:

Ex: فرض می‌کنیم جسمی با سرعت v_0 روی سطح صاف حرکت می‌کند. می‌خواهیم اثر مقاومت هوا را بر حرکت جسم بررسی کنیم.

$$f(v) = m\frac{dv}{dt} = -c_1 v$$

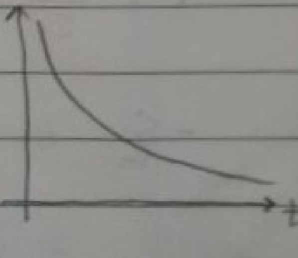
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{c_1}{m}dt \Rightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{c_1}{m}t \quad (1)$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{c_1}{m}t \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{c_1}{m}t}$$

زمان ویژه $\tau = \frac{m}{c_1}$ (2)

$$(1),(2) \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t زیاد $\rightarrow$ v کم



$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow x = v_0\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$?

$$\lim_{t\to\infty} x = v_0\tau \Rightarrow x = \frac{m v_0}{c_1}$$

حالت افقی با مقاومت درجه 2:

$$f(v) = -c_2 v^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{c_2}{m}dt \Rightarrow -\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{c_2}{m}t \Rightarrow \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{c_2}{m}t$$

$$\frac{1}{v}=\frac{c_2 t}{m}+\frac{1}{v_0}\longrightarrow\frac{1}{v}=\frac{c_2 v_0 t+m}{m v_0}\longrightarrow v=\frac{m v_0}{m\left(\underbrace{\frac{v_0 c_2}{m}}_{k}t+1\right)}$$

$$\frac{dx}{dt}=v=\frac{v_0}{kt+1}\qquad \int dx=\int_0^t\frac{v_0}{kt+1}\,dt\longrightarrow x=\frac{v_0}{k}\ln(1+kt)$$

تغییرات x برحسب t

در حالت درجه ② مشاهده می‌شود که اگرچه مقاومت درجه ② در کاهش سرعت موفق‌تر از درجه ① است، ولی با کاهش این سرعت مقدار نیروی درجه ② آنقدر کم می‌شود که نمی‌تواند جلوی ادامه حرکت جسم حتی با سرعت خیلی کم را بگیرد. به همین دلیل است که در حالت درجه ② به ازای $t\to\infty$ ، x نیز ∞ می‌شود.

حرکت قائم (سقوط آزاد) - خطی

$f(v)=c_1 v$

$$\sum F=ma\Rightarrow -mg-c_1 v=m\frac{dv}{dt}$$

(+) ↑

$$\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{-mg-c_1 v}=\int_0^t\frac{dt}{m}\Rightarrow mg+c_1 v=u,\quad du=c_1\,dv$$

$$\Rightarrow t=\frac{-m}{c_1}\ln(mg+c_1 v)\Big|_{v_0}^{v}$$

$$t=\frac{-m}{c_1}\ln\left(\frac{mg+c_1 v}{mg+c_1 v_0}\right)$$

$$-\frac{c_1}{m}t=\ln\left(\frac{mg+c_1 v}{mg+c_1 v_0}\right)\Rightarrow e^{-\frac{c_1}{m}t}=\frac{mg+c_1 v}{mg+c_1 v_0}$$

$$\Rightarrow mg+c_1 v=(mg+c_1 v_0)\,e^{-\frac{c_1}{m}t}$$

$$v=\frac{mg}{c_1}\left(1+\frac{c_1 v_0}{mg}\right)e^{-\frac{c_1}{m}t}-\frac{mg}{c_1}$$

$$v=\frac{-mg}{c_1}+\left(\frac{mg}{c_1}+v_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad\boxed{\tau=\frac{m}{c_1}}$$

$$t\gg\tau\Rightarrow v=\frac{-mg}{c_1}$$ سرعت حد $$V_t=\frac{mg}{c_1}$$

$$\Rightarrow V = -V_t + (V_t + V_0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V = -V_t\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_0 = 0 \Rightarrow \boxed{V = -V_t\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

مثال: مقدار x در حرکت مطلق را به دست آورید. $(V_0 = 0)$

$$\frac{dx}{dt} = -V_t\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -V_t + V_t\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$dx = \left(-V_t + V_t\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(-V_t + V_t\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt \qquad x = -V_t\, t + V_t\, ?$$

حرکت قائم (سقوط آزاد): درجه 2

$(+)\downarrow$

$$mg - c_2 v|v| = \frac{m\,dv}{dt}$$

$$mg - c_2 v^2 = \frac{m\,dv}{dt}$$

$$mg - c_2 v^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow mg\left(1 - \frac{c_2 v^2}{mg}\right)$$

$$\cancel{m}g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right) = \cancel{m}\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)} = \int_0^t dt \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_2}}$$

$$t = \underbrace{\frac{v_t}{g}}_{\tau} \tanh^{-1} \frac{v}{v_t} \Bigg]_{v_0}^{v}$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_t}{g}\left(\tanh^{-1}\frac{v}{v_t} - \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right)$$

$$\tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t} + \frac{gt}{v_t} = \tanh^{-1}\frac{v}{v_t}$$

$v_t = \frac{mg}{c_1}$ $\quad \tau = \frac{m}{c_1} \rightarrow \tau = \frac{v_t}{g}$ $\quad v_0 = \tau g$ $\quad \tau = \frac{v_t}{g}$

$$\frac{v}{v_t} = \tanh\left[\frac{gt}{v_t} + \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right]$$

$$v = v_t \tanh\left[\frac{t}{\tau} + \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right]$$

if $v_0 = 0 \Rightarrow v = v_t \tanh\left[\frac{t}{\tau}\right]$

$$v = v_t \tanh\frac{t}{\tau}$$ → مهم

$\tanh x = x$ if $t \ll \tau \rightarrow v = v_t \frac{t}{\tau} = v_t \frac{t}{\frac{v_t}{g}} = gt$

$t \gg \tau \Rightarrow v = v_t$

شکل دیگر v برحسب $\frac{\sinh^{-1}}{\cosh^{-1}}$

$$v = v_t \frac{e^{\frac{2t}{\tau}} - 1}{e^{\frac{2t}{\tau}} + 1}$$ → مهم

Ex: قطر یک قطره باران $10^{-4}\,m$ و قطر یک توپ بسکتبال $0.25\,m$ است. سرعت حد را برای هر یک از این دو به دست آورید.

$$\frac{\text{درجه 2 } f(v)}{\text{درجه 1 } f(v)} = \frac{-c_2 v^2}{-c_1 v} = \frac{0.22\, D^2 v|v|}{1.55\times10^{-4} D v} = 1.4\times10^{3}|v|D$$

درجه 1 قطره باران $1.4\times10^{3}|v|10^{-4} = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{0.14}\,\frac{m}{s} = 7$

← سرعت اگر از این بالاتر شد درجه 2 اگر پایین شد درجه 1

درجه 2 توپ $1.4\times10^{3}|v|0.25 = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{350}\,\frac{m}{s}$

(خطی) $v_t = \frac{mg}{c_1} = 0{,}33\ \frac{m}{s}$ $\quad \tau = \frac{v_t}{g} = 0{,}034\,(s)$

تربیعی $v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_2}} = 2{,}6\ \frac{m}{s}$ $\quad \tau = \frac{v_t}{g} = 2{,}1\,(s)$

(حل) $v = -v_t\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $\quad v = v_t \dfrac{e^{\frac{2t}{\tau}} - 1}{e^{\frac{2t}{\tau}} + 1}$

اگر سرعت یک جسم طبق رابطه $\dot{x} = bx^{-3}$ به x تغییر کند نیروی وارد بر ذره را بر حسب تابعی از x به دست آورید.

$\dot{x} = bx^{-3}$, $\ddot{x} = -3bx^{-4}$

$F = m\ddot{x} = m\dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx} = m\left(-3bx^{-4}\right)\left(bx\right)^{-3} = -3mb^2x^{-}$

چرا؟

ذره‌ای به جرم m در میدان گرانشی ثابت با سرعت اولیه v به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود اگر مقاومت هوا درجه 2 باشد $f(v) = kmv^2$ سرعت جسم و سرعت ذره در رسیدن به نقطه‌ی پرتاب را به دست آورید.

$F = mv\dfrac{dv}{dx} = m\dfrac{dv}{dt}$ مثبت

$mg - c_2 v|v| = \dfrac{m\,dv}{dt}$

نشان دهید در حرکت درجه 2

$x = \dfrac{-m}{c_2}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{c_2 g}{m}}\,t\right)$

$v = v_t \dfrac{e^{\frac{2t}{\tau}} - 1}{e^{\frac{2t}{\tau}} + 1}$ $\quad \dfrac{dx}{dt} = v_t \dfrac{e^{\frac{2t}{\tau}} - 1}{e^{\frac{2t}{\tau}} + 1}$

$x = \int v_t \tan\dfrac{-t}{\tau}\,dt$ $\quad \tan x = \ldots\ldots$

جواب سوال 8 بس:

$-ma = F = -mg\mu \sin 30 \mp mg\cos 30^\circ$

$-a = -g\mu \sin 30 \mp g\cos 30$ $\qquad -x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

$a = g\mu \sin 30 + g\cos 30$ $\qquad T = 0{,}21(s)$

$T_{up} + T_{down} = T_{tot}$

$T_{tot} = 0{,}28$

$F = -mg\sin 30 - \mu mg\cos 30 = ma$

$\ddot{x} = -g(\sin 30 + \mu\cos 30)$

$V = V_0 + at \rightarrow t = \frac{-V_0}{a} \rightarrow 0{,}17(s)$

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \rightarrow x = ?$

۱۱- یک مکعب فلزی به جرم m بر روی یک سطح افقی می‌لغزد. این سطح با یک روغن نفتی روغنکاری شده است به طوری که مقاومت لزجتی که با توان $\frac{3}{2}$ سرعت تغییر می‌کند بر مکعب وارد می‌شود $F(v) = -cv^{\frac{3}{2}}$

اگر مکعب در ابتدا از نقطه $x=0$ با سرعت اولیه V_0 حرکت کند، نشان دهید که این مکعب نمی‌تواند مسافتی بیشتر از $\frac{2mV_0^{\frac{1}{2}}}{c}$ را طی کند.

$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}$

$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} \rightarrow \frac{-cV^{\frac{3}{2}}}{m} = V\frac{dV}{dx} \rightarrow -\frac{c}{m}V^{\frac{1}{2}} = \frac{dV}{dx}$

$\rightarrow \int_{V_0}^{0} V^{-\frac{1}{2}}dV = \int_0^{x_m} \frac{-c}{m}dx \Rightarrow -2V_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{c}{m}x_m \Rightarrow x_m = \frac{2mV_0^{\frac{1}{2}}}{C}$

چرا؟

محدوده چون در بازه قرار داره

$F = ma$

$-cV^{\frac{3}{2}} = m\frac{dV}{dt} \Rightarrow -cV^{\frac{3}{2}}dt = mdV \Rightarrow \frac{-c}{m}\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V^{\frac{3}{2}}}$

$-\frac{c}{m}t = -2V^{-\frac{1}{2}} + 2V_0^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad V^{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{c}{m}t + 2V_0^{-\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow V = \left(\frac{2}{\frac{c}{m}t + 2V_0^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$

Ex: قایقی با سرعت v_0 در خلاف جهت جریان آب به رودخانه انداخته می‌شود. جریان مخالف نیروی $f = \alpha e^{-\beta v}$ را بر قایق وارد می‌کند. عبارتی برای $v(t)$ به دست آورید و مسافت و زمانی که طی آن قایق متوقف می‌شود را به دست آورید.

$F = ma \qquad a = \frac{dv}{dt}$

$F = m\frac{dv}{dt} \qquad m\frac{dv}{dt} = -\alpha e^{-\beta v} \longrightarrow$

$$\frac{1}{m}\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-\alpha e^{-\beta v}} \longrightarrow -\frac{\alpha}{m}\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} e^{\beta v}\, dv$$

$$-\frac{\alpha}{m} t = \frac{1}{\beta} e^{\beta v}\Big|_{v_0}^{v} \longrightarrow -\frac{\alpha}{m} t = \frac{1}{\beta}\left(e^{\beta v} - e^{\beta v_0}\right)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\beta}\ln\left(e^{\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t\right)$$

توقف

$v = 0 \longrightarrow t = \frac{m}{\alpha\beta}\left(1 + e^{\beta v_0}\right)$

$x = \int v\, dt$

$$m v \frac{dv}{dx} = -\alpha e^{-\beta v} \qquad -\frac{\alpha}{m}\int_0^x dx = \frac{v\, dv}{e^{-\beta v}} = \int_{v_0}^{0} v e^{+\beta v}\, dv$$

$v = u' \qquad dv = du' \qquad \frac{1}{\beta} v e^{\beta v} - \int \frac{1}{\beta} e^{\beta v} du'$

$e^{\beta v} dv = dv' \longrightarrow \frac{1}{\beta} e^{\beta v} = v'$

$$x' = \frac{v}{\beta} e^{\beta v} - \frac{1}{\beta^2} e^{\beta v}\Big|_{v_0}^{0} \Rightarrow x = -\frac{m}{\alpha} x'$$

$$x = -\frac{m}{\alpha}\left(-\frac{1}{\beta^2} - \frac{v_0}{\beta} e^{\beta v_0} + \frac{1}{\beta^2} e^{\beta v_0}\right)$$

ج) ذره‌ای تحت تأثیر نیروی زیر قرار دارد. تابعیت x و x_t را به دست آورید.

$f(x) = -kx + \frac{a}{x^3} \qquad V(x) = -\int f\, dx \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \Rightarrow v = \dots$

$x = \int v\, dt$

اگر دامنه نوسان کوچک در نظر گرفته شود هم سری با قانون هوک مشخص می شود

$$V(x) = \cancel{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \longrightarrow V(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$f = -\frac{dV(x)}{dx}$$ زیرا f = صفر

اگر دامنه کوچک باشد از جمله های توان بیش از 2 صرف نظر

اگر مشتق بگیریم a_1 صفر می شود

پس جمله دوم هم صفر در نظر گرفتیم

اگر نوسانگر را از وضعیت تعادل خارج کنیم (مثلاً فنر را بکشیم) به حرکت تناوبی ادامه می دهد تا به وضعیت تعادل برسد در آنجا بخاطر داشتن سرعت باز هم به حرکت خود ادامه می دهد و اگر حرکت میرا نباشد تا بی نهایت به حرکت تناوبی خود ادامه خواهد داد.

$$f = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \longrightarrow x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega(t + T_0) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi$$

$A = x(m)$

$\varphi_0 = -\pi$

دوره تناوب $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

if $\begin{cases} t = 0 \\ x = x_m \end{cases} \xrightarrow{\varphi_0 = ?}$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x_m = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\sin\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

اگر در نقطه تعادل سرعت V_0 را داشته باشد؟

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ $\qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$t=0 \Rightarrow x(t)=0$

$V(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ $\qquad 0 = A\sin(0+\varphi_0) \to \varphi_0 = 0$

$V_0 = \omega A \cos 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{V_0}{\omega}}$

if $t=0$ $\quad x_0 \quad x_0 = A\sin(0+\varphi_0) \Rightarrow \boxed{x_0 = A\sin\varphi_0}$ (1)

$V_0 \quad V_0 = A\omega_0\cos\varphi_0$ (2) $\Rightarrow V_0 = \frac{x_0}{\sin\varphi_0}\omega_0\cos\varphi_0$ (3)

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\tan\varphi_0}{\omega_0} = \frac{x_0}{V_0}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\ }$

$$\boxed{\tan\varphi_0 = \frac{\omega_0 x_0}{V_0}}$$

$$\omega_0^2 (1)^2 + (2)^2 = A^2\omega_0^2\sin^2\varphi_0 + A^2\omega_0^2\cos^2\varphi_0 = x_0^2\omega_0^2 + V_0^2$$

$$A^2\omega_0^2 \underbrace{(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0)}_{1} = x^2\omega_0^2 + V_0^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}$$

Ex: ذره‌ای به جرم 2kg در طول محور xها تحت نیروی بازگرداننده به بزرگی 8x به سمت مبدأ حرکت می‌کند. اگر در ابتدا ذره در x=20m در حال سکون باشد مطلوب است معادله حرکت، سرعت، حرکت سینوسی و زمان تناوب؟

$\boxed{\omega_0 = 2}$ $\qquad \tan\varphi_0 = \frac{2\times 20}{V_0} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$A^2 = (20)^2 +$

ادامه دارد

اگر جسم و فنر در راستای محور y رها باشد؟

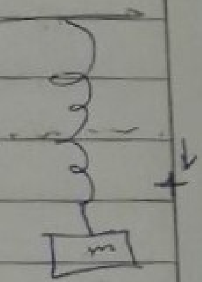
$$mg - kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}x - g\right) = 0$$

$$m\ddot{x} + k\underbrace{\left(x - \frac{gm}{k}\right)}_{} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - \dfrac{mg}{k} = x' \\ \ddot{x} = \ddot{x}' \end{array}\right.$$

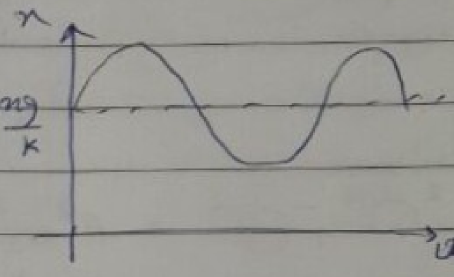
$$m\ddot{x}' + kx' = 0$$



$$x'(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x - \frac{mg}{k} = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mg}{k}$$



هرچقدر $m\uparrow$ ← نقطه تعادل پایین تر

اگر $k \gg mg$ ← مثل وزنه آویزان

مشاهده می کنیم که اثر یک نیروی خارجی ثابت بر نوسانگرها فقط این است که نقطه تعادل جابجا می شود.

(مهم)

Ex: جسمی به جرم m از فنری به طور قائم آویخته شده است طول فنر به اندازه D_1 افزایش می یابد اگر وزنه را به اندازه D_2 از وضعیت تعادل به پایین بکشیم و در لحظه $t=0$ رها کنیم مطلوب است معادله حرکت، سرعت جسم در لحظه رسیدن به نقطه تعادل و شتاب جسم در بالاترین نقطه.

$$f = 0 \rightarrow kD_1 = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{D_1}$$

$x(t) = A\sin \omega_0 t + B\cos \omega_0 t \longrightarrow D_2 = B\cos \omega_0 t \qquad B = D_2$

مشتق ←

$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t \longrightarrow 0 = A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t$

$\Rightarrow \boxed{A = 0}$

$t = 0 \longrightarrow x = D_2 \;,\; \dot{x}(0) = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\dot{x}(t) = -D_2 \sqrt{\frac{g}{D_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right) \longrightarrow v = -D_2 \sqrt{\frac{g}{D_1}} \sin \frac{\pi}{2}$

تکامل $x_2 = D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right)$

$\ddot{x}(t) = -D_2 \frac{g}{D_1} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right)$

$\longrightarrow = \pi$

$-D_2 = D_2 \cos(\omega t)$

جواب سوال 8 شب:

$F = ma = -kx \Rightarrow (m+M)\ddot{y} = -ky \Rightarrow \ddot{y} = \frac{-k}{m+M} y$ (*)

$\ddot{y} + \frac{k}{M+m} y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{M+m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$

$y(t) = A\sin(\omega t + \theta) \xrightarrow{\theta = ?} \dot{y}(t=0) = 0 = A\cos(\omega t + \theta)$

جسم رها شود $v = 0$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$y(t) = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y(t) = A\cos \omega t \Rightarrow y(t) = d\cos \omega t$ ③ $\quad A = d$

شتاب لازم برای m $\Rightarrow m\ddot{y}_m = mg$ ①

معادله نوسان برای m $\Rightarrow m\ddot{y}_m = -\omega^2 y = -\frac{k}{M+m} y$ ②

$\Rightarrow mg - N = -\frac{k}{M+m} y$

چون نقطه ی بیشترین ... $\frac{v_t}{2}$ ... g

$N = mg + \frac{K}{m+M}\, y$ از (3) داریم $\Longrightarrow$

$N = mg + \frac{K}{M+m} d\cos\omega t \Longrightarrow 0 = mg + \frac{k}{M+m} d\cos(\omega t) = 0$

$t = \frac{T}{2}$ $\xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}}$ $t = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$

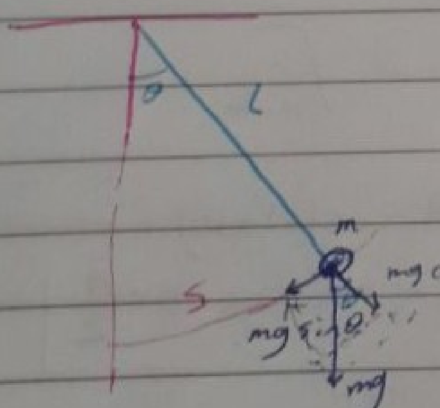
$mg + \frac{mk}{m+M} d\cos(\overbrace{\omega \times \frac{\pi}{\omega}}^{\pi}) = 0$

$\Rightarrow mg + \frac{mk}{M+m} d\overbrace{\cos\pi}^{-1} = 0 \Rightarrow mg - \frac{mk}{M+m} d = 0 \Rightarrow mg = \frac{mk}{m+M} d$

$\boxed{\Rightarrow d = \frac{g(M+m)}{K}}$

$M: M\ddot{x} = Mg + N - kd$ $\qquad (m+M)\ddot{x} = (m+M)g - kd$ یعنی

$m: M\ddot{x} = mg - N$ $\qquad (m+M)\ddot{x} + k(x$



$F = m\ddot{x} = m\ddot{s} = -mg\sin\theta$

$\ddot{s} + g\sin\theta = 0$

θ کوچک $\rightarrow \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{s} + g\theta = 0$

$s = L\theta \rightarrow \ddot{s} = L\ddot{\theta}$

$\ddot{s} + \frac{g}{L} s = 0$

$\frac{g}{L} \leftarrow \frac{k}{m} \Leftarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

تمرین: برای یک آونگ که طول آن 0.8m است نشان دهید که اگر دامنه نوسان θ_0 باشد دوره تناوب از رابطه زیر بدست می آید.

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-\alpha\sin^2\phi)^{\frac12}} \qquad \alpha = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

$$W = \int f_{ext}\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac12 kx^2$$

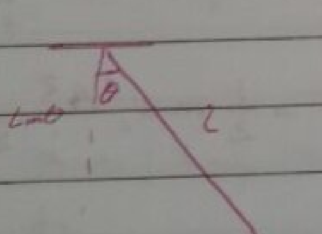
$$V(x) = \frac12 kx^2 \qquad E = K + V = \frac12 m\dot{x}^2 + \frac12 kx^2$$

$$K = \frac12 m\dot{x}^2 \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm\left(\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}\right)^{\frac12} \rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{\pm\left(\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}\right)^{\frac12}}$$

می گیریم

$$\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \longrightarrow x = \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{k}}}_{A}\cos\overbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}^{\omega}\,t \qquad A^2 = \frac{2E}{k}$$

$$\boxed{E = \frac12 kA^2}$$



$$V = mgh = mg(l - l\cos\theta)$$
$$mgl(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V = mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = mgl\frac{\theta^2}{2} = \frac12 \frac{mg}{l} s^2$$

$$E = \frac12 m\dot{s}^2 + \frac12 \frac{mg}{l} s^2$$

$l\theta = s$

$$V = \frac12 kx^2$$

میانگین انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کل نوسانگر هماهنگ را بدست آورید.

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} K\,dt$$

دوره تناوب ← T_0

$t=0 \rightarrow u=0$

$t=T_0 \rightarrow u=2\pi$

$u = \frac{2\pi}{T_0} t$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \cos^2 \omega t\,dt\right)$$

$$\omega_0 t = u \rightarrow du = \omega_0 dt = \frac{2\pi}{T_0} dt \Rightarrow dt = \frac{T_0}{2\pi} du$$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 u\,du}_{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{1}{2} k x^2 dt = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A^2 \sin^2(\omega t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2 \omega t\,dt\right) \Rightarrow \langle V \rangle = \frac{1}{4} k A^2$$

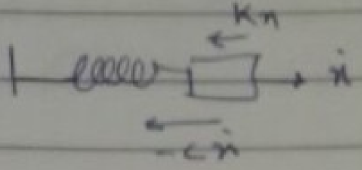
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{k = m\omega_0^2} \qquad \langle V \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \langle K \rangle$$

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

حرکت هماهنگ میرا:

$f_{(v)} = -c\dot{x}$



$D x = \dot{x}$

$DD x = \ddot{x}$

$D = \frac{d}{dt}$

$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\frac{c}{m} = 2\gamma \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$(D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2)x = 0$

$((D^2 + 2\gamma D + \gamma^2) - \gamma^2 + \omega_0^2)$

$((D+\gamma)^2 - (\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})^2) = (D + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})(D + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$

$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$(D + \gamma + q)(D + \gamma - q)x = 0$

$\rightarrow A_2 e^{-(\gamma - q)t}$

$\frac{dx}{dt} + \gamma x + qx = 0$

$\dot{x} + (\gamma + q)x = 0$

$\frac{dx}{dt} = -(\gamma + q)x \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -(\gamma + q)\,dt$

$\ln x = -(\gamma + q)t \rightarrow x = A_1 e^{-(\gamma + q)t}$

$x(t) = A_1 e^{-(\gamma + q)t} + A_2 e^{-(\gamma - q)t}$

$q > 0$ فوق میرایی

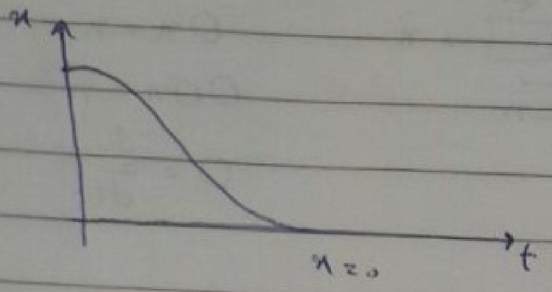
$q = 0$ میرایی بحرانی

$q < 0$ زیر بحرانی

$q > 0 \to \gamma^2 > \omega_0^2$

۱) ابرمیرایی: (غیرنوسانی)؟

A_1, A_2 مستقل اند.



$q = 0$

۲) میرایی بحرانی: A_1, A_2 مستقل نیستند

$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = A e^{-\gamma t}$

(*) $(D + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})(D + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$

$(D+\gamma)(D+\gamma)x = 0$

$D(xe^{\gamma t}) = e^{\gamma t} D(x) + x\gamma e^{\gamma t}$

$u = (D+\gamma)x \Rightarrow \boxed{u = Ae^{-\gamma t}}$

$e^{\gamma t}(D+\gamma)x = A$

(**)

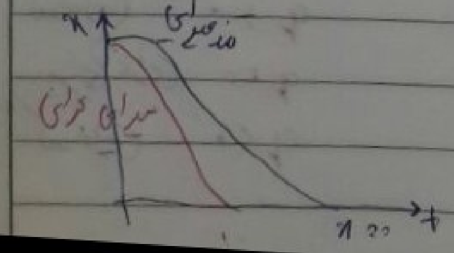
$(D+\gamma)x = Ae^{-\gamma t} \Rightarrow A = e^{\gamma t}(D+\gamma)x \Rightarrow A = D(xe^{\gamma t})$

$A = \frac{d}{dt} xe^{\gamma t} \to A\,dt = d\,xe^{\gamma t} \to \underbrace{\int A\,dt}_{At+B} = \int d\,xe^{\gamma t}$

$xe^{\gamma t} = At + B$

$x(t) = A_1 e^{-(\gamma+q)t} + A_2 e^{-(\gamma-q)t}$

$x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t}$

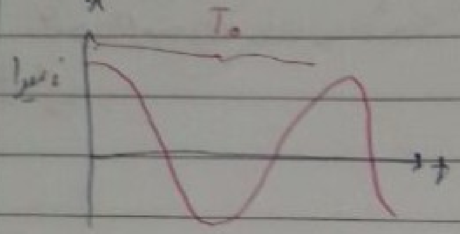


۱۹/۱/۸ فیزیک مدرن

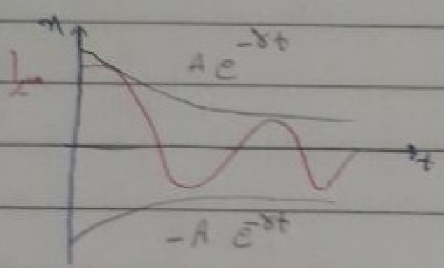
3) زیرمیرایی:

$q < 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos(\omega_d t + \theta_0)\right)$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$



ملاحظات مربوط به انرژی:

$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$f(v) = -c\dot{x}$

$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = k\dot{x}x + m\ddot{x}\dot{x} = (kx + m\ddot{x})\dot{x}$

$\rightarrow \dot{E} = -c\dot{x}\dot{x} \rightarrow \dot{E} = -c\dot{x}^2$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$

$\int_{E_1}^{E_2} \frac{dE}{dt} = \int -c\dot{x}\frac{dx}{dt} \rightarrow -c\dot{x}x$ نیروی اتلافی

$E_2 - E_1 = W$

$\dot{E} = -c\dot{x}^2$

ضریب کیفیت: Q $\quad x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \theta_0)$

$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}\left(\gamma\sin(\omega_d t + \theta_0) - \omega_d\cos(\omega_d t + \theta_0)\right)$

/ /

$$\Delta E = \int_0^{T_d} \dot{E}\, dt \qquad \theta_0 = 0$$

$$\theta = \omega_d t \qquad dt = \frac{1}{\omega_d}$$

$$\Delta E = \frac{1}{\omega_d} \int_0^{2\pi} \dot{E}\, d\theta = \frac{cA^2}{\omega_d} \int_0^{2\pi} e^{-2\gamma t} \left[\gamma^2 \sin^2\theta - 2\gamma\, \omega_d \sin\theta \cos\theta + \omega_d^2 \cos^2\theta \right] d\theta$$

$\gamma^2 \ll \omega_0^2 \longrightarrow e^{-2\gamma t} \longrightarrow$ ثابت

$$\Delta E = -\frac{CA^2}{\omega_d}\pi e^{-2\gamma t}\omega_0^2 =$$

همواره از صفر کوچکتر است چون در حرکت میرا انرژی کم می‌شود

هنگامی که دامنه نوسان به $\frac{1}{e}$ خودش می‌رسد

$$\gamma = \frac{c}{2m}$$

$$\rightarrow \Delta E = m\gamma A^2 e^{-2\gamma t}\omega_0\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right) = m\gamma\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} T_d$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega d}$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{Td}{\tau} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tau = \frac{m}{c}\\ \gamma = \frac{c}{2m}\end{array}\right\} \rightarrow \gamma = \frac{1}{2\tau}$$

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E}$$

آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر نیمه میرا را ضریب کیفیت گویند.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_d^2 e^{-2\gamma t}\cos^2\omega_d t + \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\sin^2\omega_d t$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$= E = \frac{1}{2}m\omega_d^2 A^2 e^{-2\gamma t}(\cos^2\omega_d t + \sin^2\omega_d t)$$

$$\dot{x} = A\omega_d e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \simeq \omega_0^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2)$$

(1),(2)

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\frac{Td}{\tau}} = \frac{2\pi\tau}{Td} = \frac{2\pi\tau}{\frac{2\pi}{\omega d}} = \omega_d\tau = \boxed{\frac{\omega d}{2\gamma}}$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos\omega t$ نوسان هارمونیک را داشتیم

در حالت نامیرا

نامیرا:

if $\omega \ll \omega_0 \longrightarrow \underbrace{m\ddot{x}} + kx = f_0 \cos\omega t$

که می‌توان از این جمله صرف نظر کرد زیرا وقتی $x = \frac{f_0}{k}\cos\omega t$

بسامد خیلی کم باشد حرکت دیگر شتاب دار نمی‌باشد و با

سرعت ثابت حرکت می‌کند $\Rightarrow m\ddot{x} \approx 0$

if $\omega \gg \omega_0 \longrightarrow m\ddot{x} + \underbrace{kx} = f_0 \cos\omega t$

که می‌توان از این جمله صرف نظر کرد زیرا وقتی بسامد زیاد باشد یعنی این حرکت به سرعت بالا در زمان کم رخ می‌شود و این یعنی می‌توان از سختی فنر صرف نظر نمود

نیروها با هم $180°$ هم اختلاف فاز دارند. $x = A\cos(\omega t - 180)$

حال از روی جواب های خصوصی که داریم می‌خواهیم دامنه را به دست آوریم:

$x = A\cos(\omega t - \varphi)$

$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi)$

$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi)$ $\quad -m\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi) + kA\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cos\omega t$

$\varphi = 0$ $\quad\quad$ $\varphi = \pi$

$kA - m\omega^2 A = f_0 \Rightarrow A = \frac{f_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\omega_0 > \omega$ $\quad\quad$ $A = \frac{f_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}$ $\omega > \omega_0$

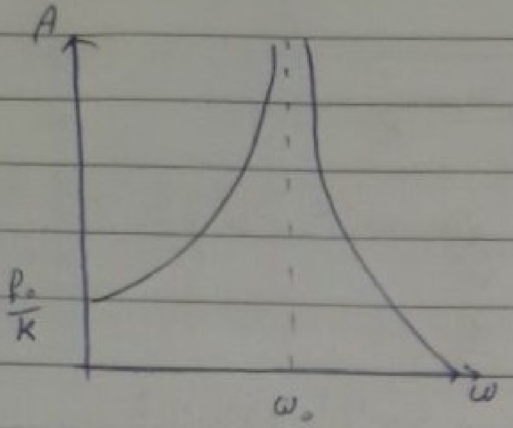
$m\omega_0^2 = k$

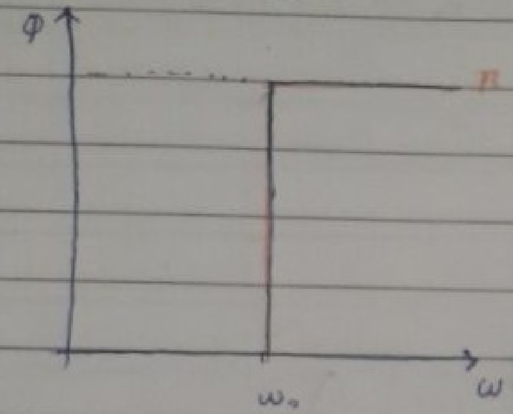
هرچه $\omega \uparrow$ ← دامنه بزرگتر وقتی $\omega = \omega_0$ دامنه به بی‌نهایت

بسامد رزونانس

اختلاف فاز قبل رسیدن به ω_0 = 0

حال بعد ω_0 به بعد می‌شود 180 درجه ← (یعنی وقتی ~~سختی~~ زیاد می‌شود)





مثال:

$f = f_0 e^{i\omega t}$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$

$x(t) = A e^{i(\omega t - \varphi)}$

$\dot{x}(t) = iA\omega e^{i(\omega t - \varphi)}$

$\ddot{x} = \underset{=-1}{i^2} A \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}$

$-mA\omega^2 e^{i(\omega t - \varphi)} + icA\omega e^{i(\omega t - \varphi)} + kA e^{i(\omega t - \varphi)} = f_0 e^{i\omega t}$

$(-mA\omega^2 + kA + icA\omega) e^{i\omega t} e^{-i\varphi} = f e^{i\omega t} e^{i\varphi}$

$-mA\omega^2 + kA + icA\omega = f_0 (\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$A(k - m\omega^2) = f\cos\varphi$ (1) $\qquad c\omega A = f\sin\varphi$ (2)

$(1)^2 + (2)^2$

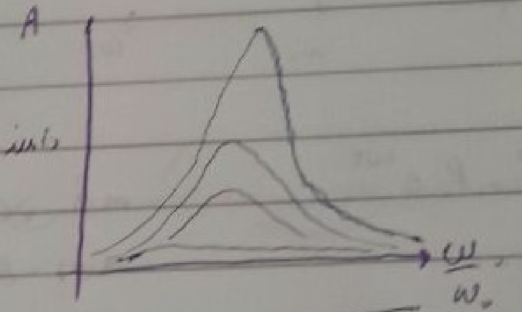
$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2A^2 = f_0^2 \qquad A = \frac{f_0}{[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

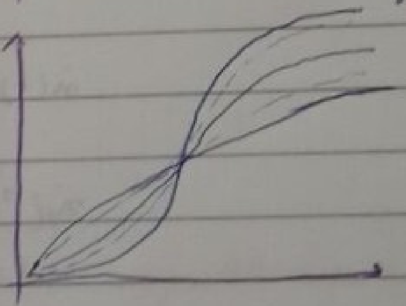
$$(2) \div (1) \rightarrow \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan\varphi \qquad A = \frac{\frac{f_0}{m}}{((\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$m\omega_0^2 \leftarrow k$

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$





همانطور که مشاهده می‌شود در این حالت نیز دامنه نوسان با کاهش ضریب میرایی افزایش می‌یابد همچنین تغییر فاز در این حالت نیز به شدت افزایش می‌یابد (در رزونانس)

point رزونانس دقیقاً ω_0 نیست.

$\frac{dA}{d\omega} = 0 \rightarrow$ رزونانس

$\hookrightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\omega_r^2 = \omega_d^2 - \gamma^2$

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - q)t} + A_2 e^{-(\gamma + q)t}$$

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega_0 \omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^4 + \omega^4)^{\frac{1}{2}}}$$

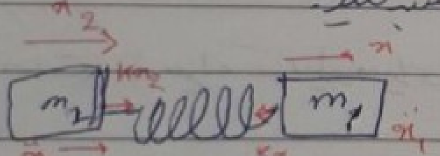
$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

$$A(\omega_r) = \frac{\frac{f_0}{m}}{\left[(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{f_0}{m}}{\left[4\gamma^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{f_0}{m}}{\left[4\gamma^4 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{f_0}{m}}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Q: جرم m تحت تاثیر نیروی بازگرداننده $-kx$ و نیروی میرایی $b\dot{x}$ قرار گرفته است و به اندازه x_0 از حالت تعادل خود جابجا شده و با سرعت اولیه صفر رها می‌شود معادله حرکت، کم میرا، شدید میرا و میرایی بحرانی را بدست آورید.

Ex: دو جرم m_1 و m_2 آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاک می لغزند و توسط فنری با ثابت k به یکدیگر متصل اند. بسامد حرکت نوسانی این سیستم را محاسبه کنید.



$$\begin{cases} (1)\quad m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1-x_2) & \times m_2 \\ (2)\quad m_2\ddot{x}_2 = k(x_1-x_2) & \times m_1 \end{cases}$$

$$m_1m_2\ddot{x}_1 = -km_1(x_1-x_2)$$

$$m_1m_2\ddot{x}_2 = +km_1(x_1-x_2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow m_1m_2(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) = k(x_1-x_2)(m_1+m_2)$$

$$x_2-x_1 = x \Rightarrow \ddot{x}_2-\ddot{x}_1 = \ddot{x}$$

$$m_1m_2\ddot{x} = -k(m_1+m_2)x$$

$$\underbrace{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}_{\mu}\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ex: جسمی به جرم 20kg که با حرکت هماهنگ ساده روی محور xها حرکت می‌کند در ابتدا ($t=0$)

در فاصله 4m از مبدأ قرار دارد. دارای سرعت $15 \frac{m}{s}$ و دارای شتاب $100 \frac{m}{s^2}$ است

و به سمت مبدأ حرکت می‌کند. موقعیت جسم در هر زمان، دامنه، فرکانس و دوره تناوب

این نوسانگر را به دست آورید. $t=0$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -100 \frac{m}{s^2}$ ، $\frac{dx}{dt} = -15 \frac{m}{s}$ ، $x = 4m$

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $\qquad t=0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -100 \rightarrow -A\omega^2 = -100$

$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ $\qquad t=0 \rightarrow v = -15\frac{m}{s} \rightarrow B\omega = -15 \;,\; B = -3$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$ $\qquad t=0 \rightarrow x=4 \rightarrow A=4 \quad \boxed{\omega = 5}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \;,\; f = \frac{5}{2\pi}$

Ex: معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر هماهنگ میرایی که توسط نیروی زیر وادار

می‌شود را حل کنید. $f = f_0 e^{-\alpha t}\cos\omega t$

/ /

فصل 4:

* حرکت در 3 بعد *

$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}}$

$f_x = m\ddot{x}$

$f_y = m\ddot{y}$

$f_z = m\ddot{z}$

$W = \Delta k$

$W = \int f\,dx = \int m a\,dx = \int m \frac{dv}{dt}\,dx = \int m \frac{dv}{dx}\boxed{\frac{dx}{dt}}\,dv$

$= \int_{v_0}^{v} v m\,dv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

تابع تعمیم در 3 بعد ← $\times d\vec{r}$

$$\text{Curl} = \nabla\times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

پایستار $W = \Delta T = -\Delta V$

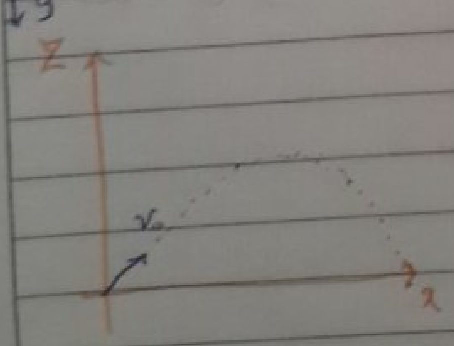
$\nabla \times f = 0$ if $f(x)$ پایستار → $\Delta T = -\Delta V \Rightarrow \Delta T + \Delta V = 0$

$\Delta E = 0$

$E_1 = E_2$

$\Delta E = W_f$ نیروی ناپایستار

$f(t, v(t))$ پایستار یا ناپایستار



پرتابه بدون مقاومت هوا:

$f = \hat{i} f_x + \hat{j} f_y + \hat{k} f_z$

$f = m\ddot{r} = -mg\hat{k}$

$\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$

$\vec{v} = \vec{v}_0 - gt\hat{k}$

$v_{0x} = v_0\cos\alpha$

$v_{0y} = v_0\sin\alpha$

$v_x = v_0\cos\alpha$, $v_z = -gt + v_0\sin\alpha$

$$\vec{r} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{k} + \vec{v}_0 t + \cancel{\vec{r}_0}$$

$$(1) \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$(1)\ x = v_0 \cos\alpha\, t$$

$$(2)\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + z$$

$$y = 0$$

$$z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right) + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$v_z = 0 \longrightarrow v_z^2 - v_{0z}^2 = -2gz \rightarrow z_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

زمان پرواز

$$T = 2t_{max}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$v_z = 0 \rightarrow \cancel{v_z} = v_{0z} - gt$$

زمان رسیدن به اوج $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$z = 0 \rightarrow x_{max} = R = v_0 \cos\alpha\, t \ , \ t = T$$

$$R = \frac{v_0 \cos\alpha\, 2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$f(v) = m\gamma \dot{r}$$

در رابطه با مقاومت هوا:

فرض می‌کنیم مقاومت هوا به صورت خطی با سرعت در ارتباط باشد $m\ddot{r} = m\gamma\dot{r} - mg\hat{k}$

در این صورت می‌توان به صورت زیر معادله حرکت را نوشت و چون نیروهای راستاهای مختلف از یکدیگر مستقل هستند برای هر راستا معادله حرکت را به دست آورید.

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\gamma \dot{x} \qquad \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \int -\gamma\, dt$$

$\ln \dot{x}\Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} = -\gamma t \Rightarrow \ln \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} = -\gamma t \rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t}$

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow \int dx = \int \dot{x}_0 e^{-\gamma t} dt$

$x = \frac{\dot{x}_0}{-\gamma}\left(e^{-\gamma t}\right)\Big|_0^t \rightarrow x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$

به طور مشابه → $y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right) = 0$

$\ddot{z} = -\gamma \dot{z} - g \Rightarrow +\gamma \dot{z} + g = (+\gamma \dot{z}_0 + g) e^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{\gamma}\left((\gamma \dot{z}_0 + g) e^{-\gamma t} - g\right)$

$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\gamma \dot{z} - g$

$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$

$\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{-\gamma \dot{z} - g} = \int_0^t dt$

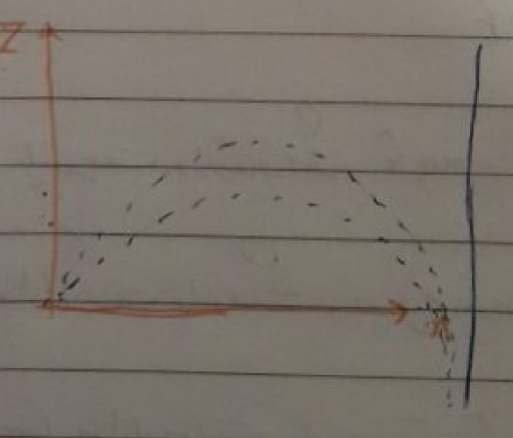
$\int dz = \int \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right) dt$

$-\frac{1}{\gamma} \ln \frac{-\gamma \dot{z} - g}{-\gamma \dot{z}_0 - g} = t$

$z = \frac{\dot{z}_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma} t + \frac{g}{\gamma^2}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$

$\frac{-\gamma \dot{z} - g}{-\gamma \dot{z}_0 - g} = e^{-\gamma t}$

$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)\left(1-e^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma} t$



نوسانگر هماهنگ در 2 بعد:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\ddot{x} = -kx \qquad x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \qquad y = B\cos(\omega t + \beta)$$

$$\Delta = \beta - \alpha$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$m\ddot{z} = -kz$$

معادله مسیر ایزوتروپ نوسانگر که در دو بعد نوسان می‌کند را می‌خواهیم بنویسیم.

جواب:

$$y = B\cos(\omega t + \alpha + \Delta) = B\left[\cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t + \alpha)\sin\Delta\right]$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{x}{A}$$

$$\sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \Rightarrow \frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\Delta$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\Delta\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\Delta$$

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\Delta - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta = \sin^2\Delta - \frac{x^2}{A^2}\sin^2\Delta$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

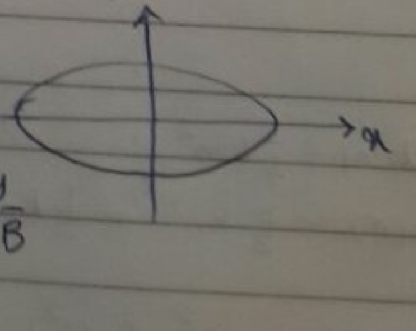
$$\left(\frac{-2\cos\Delta}{AB}\right)^2 - \frac{4}{A^2B^2}$$

$$\underbrace{\frac{4}{A^2B^2}}_{>}\underbrace{(\cos^2\Delta - 1)}_{-\sin^2\Delta\ >} < 0$$

$$\Delta \begin{cases} \Delta > 0 & \text{هذلولی} \\ \Delta = 0 & \text{سهمی} \\ \Delta < 0 & \text{بیضی ✓} \end{cases}$$

اگر Δ را بدانیم

$$\rightsquigarrow \quad \Delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



$$\Delta = \pi \Rightarrow \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \rightarrow \frac{x}{A} = -\frac{y}{B}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow y = \frac{Bx}{A}$$

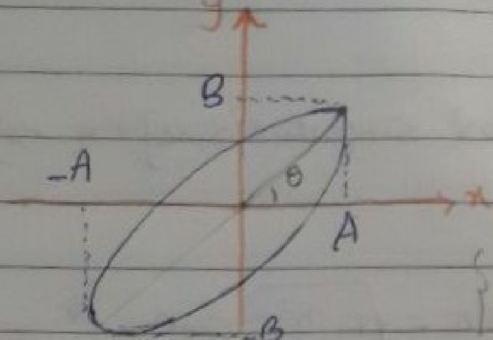
/ /

تمرین: نشان دهید که محور بیضی با محور x ها در حرکت نوسانگر دو بعدی زاویه θ می‌سازد که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\tan 2\theta = \frac{2AB\cos\Delta}{A^2-B^2}$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$x = A\cos(\omega t+\alpha) \qquad y = B\cos(\omega t+\beta)$$



$$\frac{x^2}{A^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta$$

$$1 - Ay\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \rightarrow \cdots$$

$$\begin{cases} 1 - y\frac{2\cos\Delta}{B} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \\ 1 + y\frac{2\cos\Delta}{B} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \end{cases}$$

$$2 + 2\frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta$$

$$+y\frac{2\cos\Delta}{B} + \sin^2\Delta = 0$$

$$1 + \frac{y^2}{B^2} = 2\sin^2\Delta$$

$$\frac{-B\sin^2\Delta}{2\cos\Delta}$$

$$y \quad -B\tan\Delta \quad \frac{2\cos\Delta}{\cos\theta}$$

$$m\ddot{x} = -kx \qquad x = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t$$

$$m\ddot{y} = -ky \qquad y = A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

$$m\ddot{z} = -kz \qquad z = A_3\cos\omega t + B_3\sin\omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

if همسانگرد نباشد $\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \ \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$

$$m\ddot{x} = -k_1 x \qquad x = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t$$

$$m\ddot{y} = -k_2 x \qquad y = A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t$$

$$m\ddot{z} = -k_3 x \qquad z = A_3\cos\omega_3 t + B_3\sin\omega_3 t$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U(r) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3y^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{|r|^2} \longrightarrow U = \frac{1}{2}kr^2 \longrightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

Ex: ذره‌ای به جرم m در 2 بعد تحت تأثیر پتانسیل زیر با شرایط اولیه زیر قرار می‌گیرد معادله حرکت را مشخص کنید

$V(x,y) = \frac{1}{2}K(x^2 + 4y^2)$

$t=0 \rightarrow x=a \,,\ y=0$

$t=0 \rightarrow \dot{x}=0 \,,\ \dot{y}=V_0$

$a = A_1 \cos 0 + B_1 \sin 0 \Rightarrow a = A_1$

$0 = A_2 \cos 0 + B_2\, 0 \Rightarrow 0 = A_2$

$0 = -\omega_1 A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega_1 t$

$V_0 = -2\omega B_1 \sin 2\omega t + 2\omega B_2 \cos \omega t$

$\overset{t=0}{\Rightarrow} \begin{cases} B_1 = 0 \\ B_2 = \dfrac{V_0}{2\omega} \end{cases}$

$\boxed{f = -\nabla V = V_{(x,y)} = -Kx\,i - K4y\,j} = m\ddot{r} = m\ddot{x}\,\hat{i} + m\ddot{y}\,\hat{j}$

$m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$m\ddot{y} = -4Ky \Rightarrow m\ddot{y} + 4Ky = 0 \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{4K}{m}}$

$2\sqrt{\frac{K}{m}} = 2\omega$

الکتریکی

$\vec{f} = q\vec{E}$

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = q\vec{E}$

مغناطیسی

$f = q(V \times B)$

Ex:

$m\frac{d^2 r}{dt^2} = q(V \times B)$

$m\ddot{x} = qE_x$

$m\ddot{y} = qE_y$

$m\ddot{z} = qE_z$

$\begin{cases} E = E_z = \text{یکنواخت} \\ E_x = E_y \end{cases}$

m

/ /

Ex. حرکت ذره باردار در میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت در راستای z است

را بدست آورید و معادله مسیر را بدست آورید

$f = q(v \times B)$

$$f = q \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qB(v_y \hat{i} - v_x \hat{j})$$

$$m\ddot{x}\hat{i} + m\ddot{y}\hat{j} + m\ddot{z}\hat{k} = qB\dot{y}\hat{i} - qB\dot{x}\hat{j}$$

$m\ddot{x} = qB\dot{y}$

$m\ddot{y} = -qB\dot{x}$

$m\ddot{z} = 0$

$\int m\ddot{x} = \int qB\dot{y}$

$m\dot{x} = qBy + A'$

$\dot{x} = \underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega} y + \underbrace{\frac{A'}{m}}_{A}$

$\dot{x} = \omega y + A$

$\dot{y} = -\omega x + B$

$\dot{z} = \dot{z}_0$

$y = \frac{\ddot{x}}{\omega} = -\omega x + B \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \underbrace{\frac{B}{\omega}}_{b}$

$x = b + C\cos(\omega t + \theta_0)$

$\dot{x} = -C\omega \sin(\omega t + \theta_0) = \omega y + A$

$y = \underbrace{-\frac{A}{\omega}}_{a} + C\sin(\omega t + \theta_0) = a - C\sin(\omega t + \theta_0)$

/ /

$$x-b = c\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$\frac{x-b}{c} = \cos(\omega t+\theta_0) \longrightarrow \frac{(x-b)^2}{c^2} = \cos^2(\omega t+\theta_0)$$

$$*\ \sin^2(\omega t+\theta_0) = 1-\cos^2(\omega t+\theta_0) = 1-\frac{(x-b)^2}{c^2}$$

$$y-a = -c\sin(\omega t+\theta_0) \Rightarrow (y-a)^2 = c^2\sin^2(\omega t+\theta_0)$$

$$(y-a)^2 = c^2\left(1-\frac{(x-b)^2}{c^2}\right) = c^2-(x-b)^2$$

حرکت مارپیچی $\leftarrow \begin{cases} (y-b)^2+(x-b)^2 = c^2 \\ z = \dot{z}t \end{cases}$

Ex: یک سطح شیب‌دار با افق زاویه‌ی α می‌سازد. پرتابه‌ای از پایین این سطح شیب‌دار با سرعت اولیه‌ی V_0 در جهتی که با افق زاویه‌ی β می‌سازد شلیک می‌شود.

الف) نشان دهید برد پرتابه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید $\quad R = \dfrac{2V_0^2\sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$

ب) نشان دهید برد بیشینه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. $\quad R_{max} = \dfrac{V_0^2}{g(1+\sin\alpha)}$

$$\vec{r} = (V_0\cos\beta)t\,\hat{j} + (V_0\sin\beta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2)\hat{k}$$

$$y = (V_0\cos\beta)t$$

$$z = (V_0\sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

$$\tan\alpha = \frac{z}{y}, \quad z = y\tan\alpha \quad (2)$$

$$(1)=(2) \Rightarrow y\tan\alpha = (V_0\sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$(V_0\cos\beta)t\tan\alpha = (V_0\sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$(v_0 \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 = [(v_0\cos\beta)t]\tan\alpha$$

$$\Rightarrow v_0\sin\beta - \frac{1}{2}gt = (v_0\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha - \frac{1}{2}gt = v_0\cos\beta\sin\alpha - v_0\sin\beta\cos\alpha$$

$$t = 2v_0\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{g\cos\alpha}\right)$$

$$y = v_0\cos\beta\left[\frac{2v_0\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right]$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{R} \Rightarrow R = \frac{y}{\cos\alpha}$$

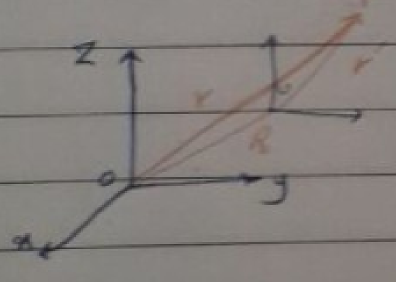
$$R = \frac{2v_0^2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

مشتق برحسب $\beta = 0$

* فصل 5 *

* دستگاه‌های مرجع ثابت *

همواره نیست



$$r = R_0 + r'$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dR_0}{dt} + \frac{dr'}{dt} \Rightarrow v = v_0 + v'$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2R_0}{dt^2} + \frac{d^2r'}{dt^2}$$

$$a = a_0 + a'$$

نیرویی که بر ذره وارد می‌شود (فقط برای حرکت شتاب‌دار نسبی است) دیگر نیست، برابر ... از ma' نیست.

$$f = ma$$

$$ma = ma_0 + ma'$$

$$f - ma_0 = ma' \qquad f' = ma'$$

/ /

نیاز به استفاده از دستگاه های نالخت معمولاً در برخی از موارد وجود دارد اگر ناظر O' را متحرک (شتابدار) و ناظر O را ساکن در نظر بگیریم می توان روابط جابجایی، سرعت و شتاب یک رویداد در دستگاه O' را به صورت زیر از دید دو ناظر به یکدیگر مرتبط کنیم.

Point: ضریب a که در روابط زیر آمده است از جنس نیرو نیست بلکه حاصلضربی است که به خاطر حرکت شتابدار دو ناظر ظاهر می شود و آن را نیروی لختی یا نیروی جاذب می نامیم. (سؤالات تکمیلی)

Ex: دو فضانورد درون یک سفینه فضایی ایستاده اند. سفینه با شتاب g و به بالا حرکت می کند. فضانورد ① توپی را به صورت افقی به سمت فضانورد ② که در $10m$ او ایستاده است پرتاب می کند. سرعت اولیه توپ چقدر باشد تا قبل از برخورد به کف سفینه به فضانورد ② برسد. ارتفاع اولیه توپ 2 متر است. مسئله را از دید ناظر داخل سفینه و ناظر لخت خارج سفینه حساب کنید.

از دید ناظر داخل

$\dot{y}_0 = 0$

$\dot{x}_0 =$

$$x = \dot{x}_0 t \xrightarrow{(2)*} \dot{x}_0 = \frac{x}{t} = \frac{10}{\sqrt{\frac{4}{g}}} = 15.6\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

به صفر، نیرویی فرض بشود

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2y_0}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 2}{g}} \ (s) \quad (1)*$$

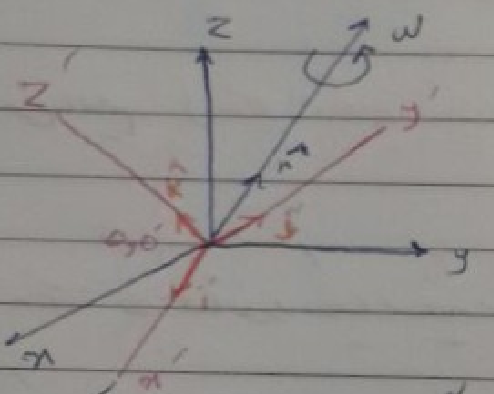
(از دید ناظر بیرونی) $\dot{x}_0$ توپ $x = \dot{x}t$

$\dot{y}_0$ توپ $y = \dot{y}_0 t + y_0$

سفینه $y = \dot{y}_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

وقتی به هم برخورد می‌کنند که $y_{\text{سفینه}} = y_{\text{توپ}} \Rightarrow \dot{y}_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = \dot{y}_0 t + y_0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

$\dot{x}_0 = 15,6\ \frac{m}{s}$



دستگاه مختصات چرخان:

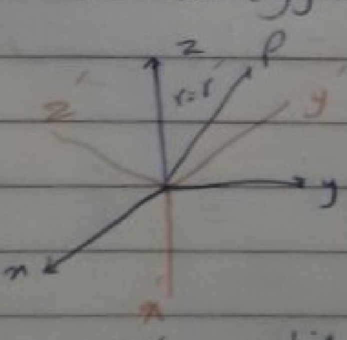
$\vec{\omega} = \omega\hat{n}$

می‌خواهیم تبدیلات جابجایی، سرعت و شتاب بین دستگاه مرجع چرخان را با یک دستگاه مرجع ثابت (لخت) به دست آوریم. O' مرجع چرخان دوران است با بسامد زاویه‌ای ω، O مرجع ثابت.

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

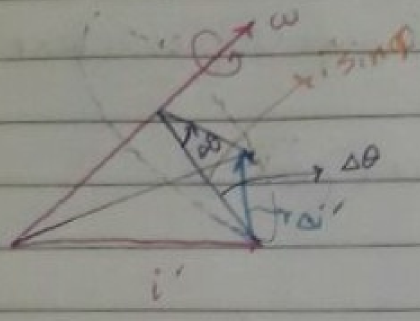
$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$

$\{\vec{r} = \vec{r}'$



① $V = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

② $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}i' + \frac{dy'}{dt}j' + \frac{dz'}{dt}k'}_{\vec{V}'} + x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt}$



$$\lim \frac{\Delta i'}{\Delta t} = \lim i' \sin\varphi \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow$$

ω

$i' \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}$ $\quad \frac{di'}{dt} = i' \sin\varphi\, \omega \Rightarrow \frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}'$

$$\frac{dj'}{dt} = \omega \times \hat{j} \quad , \quad \frac{dk}{dt} = \omega \times k'$$

$\Delta i' = i' \sin\varphi\, \Delta\theta$

$$x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt} = x'(\omega \times i') + y'(\omega \times j') + z'(\omega \times k')$$
$$= \omega \times (\underbrace{x'i' + y'j' + z'k'}_{r'}) = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (3)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $\boxed{v = v' + \omega \times r'}$
, (3)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{d}{dt}(\omega \times r') \quad (4)$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k'\right) = \frac{d^2x}{dt^2} i' + \frac{d^2y}{dt^2} j' + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}'$$
$$+ \frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}$$

$$\frac{dv'}{dt} = a' + \dot{x}'(\omega \times i') + \dot{y}'(\omega \times j') + \dot{z}'(\omega \times k') = \omega \times (\underbrace{\dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'}_{v'})$$

$$\boxed{\frac{dv'}{dt} = a' + \omega \times v'} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega \times r') = \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt} = \dot{\omega} \times r' + \omega \times (v' + \omega \times r')$$

$$= \dot{\omega}' \times r' + \omega \times v' + \omega \times (\omega \times r') \quad (6)$$

④, ⑤, ⑥ $\rightarrow \quad a = a' + \omega \times v' + \dot{\omega} \times r' + \omega \times v + \omega \times (\omega \times r')$

$$a = a' + 2\omega \times v' + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r')$$

اگر O ضمن چرخش انتقال هم داشته باشد. تبدیلات بالا به شکل زیر خواهد شد.

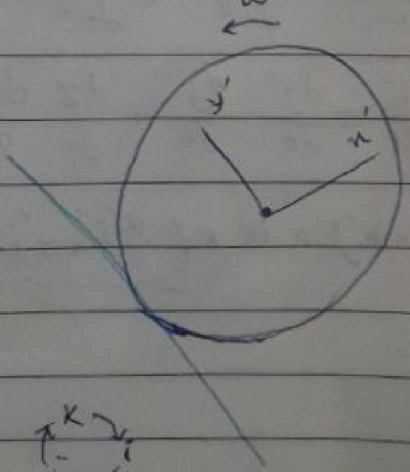
$\vec{r} = \vec{r}' + h \qquad v = v' + \omega \times r' + V_o \rightarrow$ سرعت انتقال O نسبت به o

$a = a' + \underbrace{2\omega \times v'}_{(3)} + \underbrace{\dot{\omega} \times r'}_{(2)} + \underbrace{\omega \times (\omega \times r')}_{(1)} + a_o \rightarrow$ شتاب انتقال O نسبت به o

(1) شتاب مرکزگرا است

(2) شتاب عرضی (مماسی)

(3) شتاب کوریولیس



$\vec{\omega} = \omega \hat{k}' \qquad \dot{\omega} = 0$

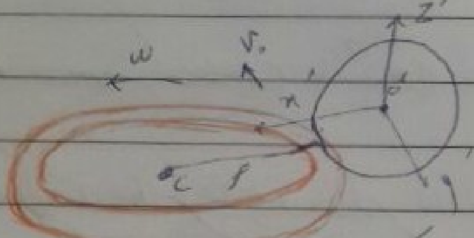
$r' = b i' \quad , \quad v' = \dot{r}' = 0 \quad , \quad a' = 0$

$a = \cancel{a'} + \cancel{2\omega \times v'} + \omega \times (\omega \times r') + \cancel{\dot{\omega} \times r'} + \cancel{a_o}$

$a = \omega_{k'} \times (\omega_{k'} \times r_{i'}) = \omega_b^2 \, k' \times j' = \omega^2 b(-i')$

$b\omega = V_o$

Ex: دوچرخه‌ای با سرعت ثابت v_0 مسیر دایره‌ای به شعاع ρ را می‌پیماید. شتاب بالاترین نقطه چرخ (به شعاع b) نسبت به زمین چقدر است؟



$$\omega = \omega k' = \frac{v_0}{\rho} k'$$

$$v' = v_0 j'$$

شتاب نسبت به مرکز چرخ $\to a' = -\frac{v^2}{b} k'$

$$r' = -\rho i' \qquad a_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$$

کوریولیس $= 2\omega \times v' = 2\frac{v_0}{\rho} k' \times (-v_0 j') = \frac{2v_0^2}{\rho} i'$

$\dot{\omega} \times r' = 0 \qquad \omega_{k'} \times (\omega_{k'} \times r'_{k'}) = 0 \longrightarrow$ مرکزگرا

شتاب بالاترین نقطه چرخ: $a = \frac{v_0^2}{\rho} i' + \frac{2v_0^2}{\rho} i' - \frac{v_0^2}{b} k' = \frac{3v_0^2}{\rho} i' - \frac{v_0^2}{b} k'$

$$a = a' + 2\omega \times v' + \dot{\omega} \times r'$$

دینامیک دستگاه‌های چرخان:

در حالتی نیروی کوریولیس وجود ندارد که یا حرکت نداشته باشد یا حرکت هم‌راستای ω باشد.

$$f + f_{\text{کوریولیس}} + f_{\text{عرضی}} + f_{\text{مرکزگریز}} - ma_0 = ma'$$

$$f = ma = ma' + 2m\omega \times v' + m\dot{\omega} \times r' + m\omega \times (\omega \times r') + ma_0$$

$$a = a' + 2\omega \times v' + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r') + a_0$$

$$f \underbrace{- 2m\omega \times v'}_{\text{کوریولیس}} \underbrace{- m\dot{\omega} \times r'}_{\text{عرضی}} \underbrace{- m\omega \times (\omega \times r')}_{\text{مرکزگریز}} - ma_0 = ma'$$

اگر بخواهیم با توجه به رابطه شتاب بین یک دستگاه چرخان و یک دستگاه ثابت ارتباط بین نیروهای وارده از دید آن دو را به دست آوریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

Point: نیروی کوریولیس به شرطی معنی‌دار است که جسم در دستگاه چرخان حرکت داشته باشد و آن حرکت موازی با ω موازی نباشد.

در رابطه ① به جز F بقیه نیروها مجازی هستند (نیروهای مجازی) هستند که به خاطر چرخش و یا انتقال دستگاه چرخان به وجود می‌آید.

Q: یک مهره با سرعت ثابت v به صورت شعاعی به سمت بیرون یک چرخ در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت ω نسبت به چرخ حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر مهره را تعیین کنید.

$\omega = \omega k'$

$r' = x i'$

$\dot{r}' = v i'$

$\ddot{r}' = 0$

کوریولیس $-2m\omega \times \dot{r}' = -2m\omega v(k' \times i') = -2m\omega v j'$

عرضی $-m\dot{\omega} \times r' = 0 \quad (\omega = \text{ثابت})$

مرکزگریز $-m\omega \times (\omega \times r') = -m\omega^2[k' \times (k' \times i' x)]$

$= -m\omega^2 (k' \times j' x)$

$= m\omega^2 x i'$

$F - 2m\omega v j' + m\omega^2 x i' = 0$

Ex: میله‌ای به طول L حول محوری که از یک سر آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω حول آن می‌چرخد. مهره‌ای در ابتدای ثابت میله قرار گرفته است و با سرعت اولیه ωL به سمت انتهای میله حرکت می‌کند. مدت زمانی که مهره به انتهای میله می‌رسد را حساب کنید.

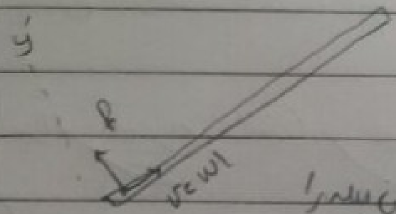
سرعت زاویه‌ای هم ثابت

$\omega = \omega k'$ چون ... ندارد، چون تغییرات $\dot{\omega}$ $\quad -2m\omega \times \dot{r}' = -2m\omega \dot{r}$

$r = x' i'$ چون سرعت در راستای x' دارد

$\dot{r}' = \dot{r}' i'$ شتاب کوریولیس دارد

$\ddot{r}' = \dots$ مرکزگرا دارد، به r' دارد



$t=0 \quad v=\omega L$ $\quad ma$ ندارد، به همین دلیل f که شعاعی این میله را نگه دارد و راه برود

$$f_j' - 2m\omega_k' \times \dot{x}_i' - m\,\omega_k \times (\omega k' \times x' i') = m\ddot{x}' i'$$

$$f_j' - 2m\omega \dot{x}' j' - m\omega^2 x'(-i') = m\ddot{x}' i'$$

$$f_j' = 2m\omega \dot{x}$$

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \to m\ddot{x}' - m\omega^2 x' = 0 \to \ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$$

$$x'(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (1) \quad , \quad \dot{x}' = A\omega e^{\omega t} + B(-\omega)e^{-\omega t} \quad (2)$$

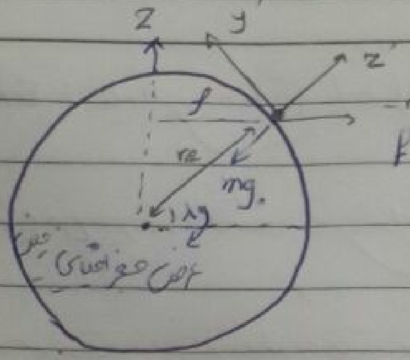
$t=0 \to x'=0 \ , \ \dot{x}' = \omega L$

$(1) \to A + B = 0 \to A = -B$

$(2) \ A\omega - B\omega = \omega L \Rightarrow A + A = L \Rightarrow A = \frac{L}{2} \quad B = -\frac{L}{2}$

$$x'(t) = \frac{L}{2}e^{\omega t} - \frac{L}{2}e^{-\omega t} = L(\sinh \omega t) \qquad \frac{e^{a} - e^{-a}}{2} = \sinh a$$

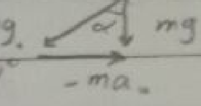
$T \to L = L \sinh \omega T \Rightarrow T = \frac{\sinh^{-1}}{\omega}$ زمان رسیدن به انتهای میله



آثار چرخش زمین:

$$f - 2m\omega \times v' - m\omega \times (\omega \times r') - m\dot{\omega} \times r' - ma_0 = ma'$$

$f - ma_0 =$ کشش حقیقی زمین



$mg \rightarrow$ کشش مجازی

زمین در هر 24 ساعت یک دور می‌چرخد این چرخش می‌تواند اثراتی بر مطالعات فنی ما داشته باشد. ابتدا حالت ساکن را در نظر می‌گیریم. یک شاقول را در نظر می‌گیریم که برای تعیین راستای عمود بر سطح زمین استفاده می‌شود. اما اگر چرخش زمین را در نظر بگیریم دیگر راستای شاقول به سمت مرکز کره زمین نخواهد بود. در این حالت به علت چرخش زمین راستای قرارگیری شاقول به اندازه‌ی α نسبت به راستای حقیقی زاویه می‌گیرد. از دید ناظر متصل به زمین، (همان دستگاه پریم دار نالخت) هیچ نیرویی به جز نیروی مجازی $-ma_0$ و همان نیروی حقیقی f بر این شاقول وارد نمی‌شود. درحقیقت او علت تغییر راستا را وجود نیروی مجازی $-ma_0$ می‌داند. (که البته ناظر لخت خارج از زمین منشاء آن را نیروی مرکزگرا می‌داند)

مرکزگرا $m\omega^2 \rho$

$\rho = r_e \cos\lambda$

$\Big\}\ m\omega^2 r_e \cos\lambda$

$$mg = mg_0 - ma_0$$